# De uitzonderingen bevestigen de regel

Walter M. Lioen en Jan van de Lune

Centrum voor Wiskunde en Informatica
Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam

Het historische beginpunt van ons verhaal wordt gevormd door een passage in een brief van 7 juni 1742 van Goldbach aan Euler. Daarin deelt Goldbach zijn bevinding mee dat elk geheel getal groter dan 2 geschreven kan worden als de som van drie priemgetallen

$$n = p + q + r, \quad (n > 2;\ p,\ q \text{ en } r \text{ priem}). \tag{i}$$

In zijn antwoord van 30 juni 1742 refereert Euler aan een eerder door Goldbach uitgesproken observatie dat elk even getal de som is van twee priemgetallen

$$2n = p + q, \quad (2n \geq 2;\ p \text{ en } q \text{ priem}). \tag{ii}$$

Met betrekking tot (ii) vonden zij bijvoorbeeld $2 = 1+1$, $4 = 1+3 = 2+2$, $6 = 1+5 = 3+3$, $8 = 1+7 = 3+5$, $10 = 3+7 = 5+5$ , . . . , $100 = 3+97 = 11+89 = 17+83 = 29+71 = 41+59 = 47+53$, hetgeen suggereert dat het doorgaans zelfs op meerdere manieren gaat. Nu was het in Goldbach's tijd nog zeer gebruikelijk om 1 tot de priemgetallen te rekenen terwijl dat (op goede gronden) nu niet meer het geval is. Heden ten dage formuleert men 'het vermoeden van Goldbach' dan ook als volgt

$$2n = p + q, \quad (2n \geq 6;\ p \text{ en } q \text{ priem}). \tag{1}$$

(We laten (i) en de moderne versie ervan hier verder buiten beschouwing.)
Of deze al ruim 250 jaar oude bewering juist is of niet is nog steeds niet bekend. Inmiddels is overigens wel aangetoond dat de rij van eventuele uitzonderingen de natuurlijke dichtheid nul heeft (binnen de even getallen). Daar komt nog bij dat in het recente verleden grote intervallen van even getallen systematisch numeriek onderzocht zijn op eigenschap (1) en dat daarbij geen enkele uitzondering (op de regel) is gevonden. Deze berekeningen laten tevens zien dat, globaal gesproken, het aantal oplossingen van (1) inderdaad toeneemt naarmate $2n$ groter wordt (ook al is deze toename niet monotoon). Met betrekking tot de moeilijkheidsgraad van dit soort problemen citeren we Davenport: 'Any problem like this which relates to *additive* properties of primes is necessarily difficult, since the definition of a prime and the natural properties of primes are all expressed in terms of multiplication.'

Op een later tijdstip (16 december 1752) gaat Euler, in een brief aan Goldbach, kort in op de kwestie of elk getal van de vorm $4n + 2 \geq 6$ geschreven kan worden als $p + q$ met $p$ en $q$ beide priemen van de vorm $4\nu + 1$ (waarbij we, gemakshalve, 1 weer even tot de priemen rekenen). Dit vermoeden wordt vaak aan Euler toegeschreven maar uit de bewaard gebleven correspondentie tussen Goldbach en Euler blijkt dat het in feite bij een eerdere gelegenheid al eens door Goldbach is uitgesproken. Wat het verdere verloop van dit vermoeden is geweest is ons onbekend. Hoeveel uitzonderingen zouden er overigens zijn als we hierbij 1 nu eens niet tot de priemen gerekend zouden hebben? Men vindt gemakkelijk dat $4n+2 = 6$, 14, 38 en 62 dan niet meer representeerbaar zijn en het zou best eens kunnen zijn dat deze vier uitzonderingen dan de regel zouden bevestigen.

Voordat we afscheid nemen van deze vermoedens van Goldbach vermelden we nog dat Sylvester in 1896 het vermoeden (1) verscherpte tot het volgende

$$2n = p + q, \quad (2n \geq 6;\ p \text{ en } q \text{ priem met } \frac{n}{2} < p \leq q < \frac{3n}{2}). \tag{2}$$

Van een noemenswaardige numerieke verificatie of enige theoretische behandeling hiervan is ons niets bekend. Wellicht is dit iets voor de aanstaande emeritus, of iemand die over zijn schouder mee leest, om eens uit te proberen.

Op 18 november 1752 liet Goldbach aan Euler weten dat hij het vermoeden had gekregen dat elk oneven getal $2n+1 \geq 3$ te schrijven is als

$$2n+1 = p + 2\times k^2, \quad (k \geq 0;\ p \text{ priem}). \tag{3}$$

In dit geval vindt men bijvoorbeeld $9 = 7+2\times 1^2$, $11 = 11+2\times 0^2 = 3+2\times 2^2$, $13 = 13+2\times 0^2 = 11+2\times 1^2 = 5+2\times 2^2$, $15 = 13+2\times 1^2 = 7+2\times 2^2$, $17 = 17+2\times 0^2$, $19 = 19+2\times 0^2 = 17+2\times 1^2 = 11+2\times 2^2$, . . . . In 1856 werd door Stern gevonden dat 5777 en 5993 hieraan niet voldoen en het zou ons niet verbazen dat dit de reden is geweest dat dit vermoeden verder slechts weinig of geen belangstelling heeft genoten. Is hier ooit theoretisch onderzoek naar gedaan? Gedachtig aan het gezegde ‘wie op die eindig veel uitzonderingen let is een kniesoor’ hebben wij op (3) een numerieke verificatie uitgevoerd met als resultaat dat er voor $2n+1 < 10^9$ geen uitzonderingen zijn buiten de reeds genoemde twee. Naar aanleiding hiervan probeerden we ook

$$2n+1 = p + 4\times k^2$$

maar het bleek al gauw dat deze generalisatie geen goede keuze is. Probeer maar eens

$$(2m+1)^2 = p + (2k)^2$$

en men zal vrij gemakkelijk inzien dat dit voor oneindig veel $m$’s niet lukt. Maar ‘ook hierom niet getreurd’ en op naar het volgende probeersel

$$2n+1 = p + 3\times k^2.$$

Helaas gaat ook dit in oneindig veel gevallen mis. Na enig puzzelen kwamen we tenslotte tot het inzicht dat de ‘enig mogelijke’ generalisaties van Goldbach’s vermoeden (3) worden gevormd door

$$2n+1 = p + 2^m\times k^2, \quad (k \geq 0;\ p \text{ priem}) \tag{4}$$

waarbij $m \geq 1$ een van te voren gefixeerd *oneven* getal is. We vatten onze voorlopige resultaten van een numerieke verificatie van (4) samen in de volgende tabel.

| $m$ | uitzonderingen | |
|---|---|---|
| | aantal | grootste |
| 1 | 2 | 5993 |
| 3 | 38 | 39167 |
| 5 | 530 | 1224647 |
| 7 | 3762 | 9020117 |
| 9 | 23121 | 54183467 |
| 11 | 132904 | 483642707 |

Merk op dat als het door (4) aangeduide vermoeden inderdaad waar is voor zekere oneven $m \geq 3$, het ook waar is bij vervanging van $m$ door $m-2$.

Nieuwsgierig naar verdere mogelijkheden tot generalisatie van (4) probeerden we ook

$$2n+1=p+2^m \times k^3 \tag{5}$$

met een *vaste* $m \geq 1$ die niet deelbaar is door 3.
Tot onze verrassing blijken (numeriek) ook hier 'de uitzonderingen de regel te bevestigen'. Onze voorlopige numerieke resultaten betreffende (5) vindt men in de volgende tabel.

| $m$ | uitzonderingen | |
|---|---|---|
| | aantal | grootste |
| 1 | 317 | 9843745 |
| 2 | 969 | 17691293 |
| 4 | 8071 | 367803655 |
| 5 | ? | 749939509 |

Hiermee lijken de meest voor de hand liggende generalisaties van (3) dan ook uitgeput te zijn. Een denkbare generalisatie zoals

$$2n+1=p+2\times k^4$$

lijkt geen schijn van kans te maken, ook al ziet het er wel naar uit dat hier de rij van uitzonderingen de dichtheid nul heeft (binnen de oneven getallen). Deze laatste eigenschap lijkt ook nog verloren te gaan bij

$$2n+1=p+2\times k^5$$

ook al beseffen we dat we ons hiermee op glad ijs begeven. Men vergelijke het een en ander met de stellingen van Romanov (1934) en die van Davenport & Heilbronn (1937) uit de additieve getaltheorie.

In 1775 kwam Lagrange met een vermoeden dat, in enigszins aangepaste vorm, luidt: op eindig veel uitzonderingen na kan elk oneven getal $2n+1 \geq 3$ geschreven worden als

$$2n+1=p+2q, \quad (p \text{ en } q \text{ priem en oneven}). \tag{6}$$

Enkele voorbeelden zijn $9 = 3+2\times 3$, $11 = 5+2\times 3$, $13 = 3+2\times 5 = 7+2\times 3$, $15 =$

$5+2\times 5$, $17=3+2\times 7=7+2\times 5=11+2\times 3$, $19=5+2\times 7=13+2\times 3$, .... Wij hebben de indruk dat $2n+1=3$, 5 en 7 de enige uitzonderingen zijn.
Het ziet er naar uit dat ook (6) zich laat generaliseren: *fixeren* we een $m\geq 1$ dan kan, op eindig veel uitzonderingen na, elk oneven getal $2n+1\geq 3$ geschreven worden als

$$2n+1=p+2^m\times q, \quad (p \text{ en } q \text{ priem en oneven}). \tag{7}$$

Ook dit hebben we numeriek getest en kwamen daarbij tot de volgende – al weer voorlopige – resultaten.

| $m$ | uitzonderingen | | $m$ | uitzonderingen | |
|---|---|---|---|---|---|
| | aantal | grootste | | aantal | grootste |
| 1 | 3 | 7 | 9 | 2749 | 101581 |
| 2 | 8 | 77 | 10 | 6337 | 327857 |
| 3 | 16 | 89 | 11 | 14193 | 699373 |
| 4 | 37 | 473 | 12 | 31789 | 1847093 |
| 5 | 89 | 1951 | 13 | 70117 | 4030051 |
| 6 | 222 | 7571 | 14 | 153769 | 10726943 |
| 7 | 520 | 10793 | 15 | 334804 | 20368637 |
| 8 | 1226 | 37393 | 16 | 724769 | 63367757 |

Het verdere verloop van deze numerieke experimenten hopen we te zijner tijd op een andere plaats uitvoeriger te beschrijven.

We beëindigen ons verhaal met enkele vragen. Zij $\theta_1$ het supremum van alle reële $\theta$'s waarvoor de volgende uitspraak waar is: op eindig veel uitzonderingen na is elk oneven getal $2n+1\geq 3$ te schrijven als

$$2n+1=p+2\times \lfloor k^\theta \rfloor, \quad (k\geq 0;\ p \text{ priem}). \tag{8}$$

Wat kan men zeggen van $\theta_1$? Is, om maar eens iets te noemen, $3<\theta_1<4$?
Tenslotte, kan men analoog aan (8) ook (6) generaliseren en voor de daarbij optredende $\theta$'s soortgelijke vragen stellen en beantwoorden?

Waarde Dirk,

Wij hebben, ter gelegenheid van je emeritaat, het bovenstaande met genoegen geschreven en we hopen dat jij het met evenveel genoegen zult lezen.

We wensen je alle goeds voor de toekomst!

Amsterdam, 28 juli 1992.